放射線取扱主任者試験で利用する数学

ARQ [*]

2008 年 11 月 8 日

概要

第 1 種放射線取扱主任者試験に必要と思われる数学の知識を記載する.

目次

[*] arq@s53.xrea.com

1 筆算

本試験では計算機の持ち込みは認められていない. 有効桁数が最低でも 3 桁の計算を必要とする上に, 管理測定技術の科目では平方根を求める計算を必要とする. ここでは筆算による開平計算の方法を紹介する.

筆算による開平の原理を式 1 に示した

$$
\begin{array}{l|l}
 & \overline{a_1 + a_2 \qquad} \\
a_1 & \sqrt{X} \\
a_1 & {a_1}^2 \\
\hline
2a_1 + a_2 & X - {a_1}^2 \\
a_2 & (2a_1 + a_2)a_2 \\
\hline
2(a_1 + a_2) & X - (a_1 + a_2)^2 \\
\cdots & \cdots
\end{array}
\tag{1}
$$

計算手順を示す.

1. 適当な値 a_1 を選び, 左の部分 (**副運算**) に 2 つ縦に並べて書く. 右の部分 (**主運算**) の部分には ${a_1}^2$ を書く.
2. 主運算の部分に X から ${a_1}^2$ を引いた値を書く (この値を X_1 とする).
3. 次に適当な値 a_2 を決める.
4. 副運算に $2a_1 + a_2$, a_2 をこの順に並べて書く.
5. 主運算の部分に $(2a_1 + a_2)a_2$ を書く.
6. 福運算の下段部分に $(2a_1 + a_2)$ と a_2 の和を, 主運算の部分に X_1 から $(2a_1 + a_2)a_2$ を引いた値を書く.

以降, 3 から 6 を繰り返して十分な精度を得たところで計算を打ち切ればよい.

例として, 53613 の平方根を求める過程を式 2 に示した. この筆算を理解するには適宜省略してある 0 を書き込むと分かりやすい.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overline{2\;\;3\;\;1.\;\;5} \\
2 & \sqrt{53613} \\
2 & 4 \\
\hline
43 & 136 \\
3 & 129 \\
\hline
461 & \quad 700 \\
1 & \quad 461 \\
\hline
4625 & \quad 239\,00 \\
5 & \quad 231\,25 \\
\hline
4630 & \qquad 7\,75 \\
\cdots & \qquad \cdots
\end{array}
\tag{2}
$$

2 微分方程式

この節では簡単な微分方程式の解法と, 放射線取扱主任者試験で扱う微分方程式を紹介する.

2.1 変数分離形微分方程式

関数 $f(x)$ が x の関数, 関数 $g(y)$ が y の関数であるとき

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{3}$$

なる方程式を変数分離形という.

式 3 の一般解は次の式で与えられる.

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C \tag{4}$$

2.2　様々な微分方程式

2.2.1　核分裂の発生

任意の安定ではない原子がいつ核分裂を起こすかは特定できないが, 同種の安定ではない原子がある期間でどの程度の割合で核分裂を起こすかは統計的に分かっている. なお, 原子数がある時点からちょうど半分になるまでの時間を**半減期**という.

このような現象を方程式で表すとしよう. いま, N 個の原子が存在し, 微少の時間で N 個のうち λ の割合で核分裂をするならば, 原子の数 N と経過時間 t の間において次の微分方程式が成り立つ.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{5}$$

この方程式の解は, C は積分定数として

$$N = C\exp(-\lambda t) \tag{6}$$

と表される. $t = 0$ における原子の数を N_0 とすれば, 式 5 の解は

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \tag{7}$$

と特定できる.

なお, 放射能の定義は式 5 の λN であり, 式 5 中の定数 λ は壊変定数と呼ばれる. 壊変定数は核種ごとに決まっており外部環境によらない.

3　確率分布

本節では代表的な確率変数の取扱といくつかの確率分布について取り扱う.

3.1　様々な確率密度関数

放射線取扱主任者試験で出題される測定技術の科目において想定される確率分布はポアソン分布である.

ポアソン分布の意味は適当な長さ λ あたり 1 個の粒子が分布している状態の直線を考え任意の連続した長さ λ の線分を切り取ったとき, その線分に含まれている粒子の数の分布である.

管理技術ではポアソン分布の直線を時間軸, 粒子を崩壊した原子核の数と考える.

以降では, ポアソン分布を理解する上で重要な確率分布を考える.

3.1.1　二項分布

確率 p で事象 A が発生するような試行を独立に N 回繰り返したとき, 事象 A が発生する回数 r の分布 $B_{N,p}(r)$ は式 8 で表される**二項分布** (Binomial distribution) に従う.

$$B_{N,p}(r) = \begin{pmatrix} N \\ r \end{pmatrix} p^r q^{N-r} \tag{8}$$

$$(q \equiv 1 - p)$$

ここで, $\begin{pmatrix} N \\ r \end{pmatrix}$ は, $N\cdot(N-1)\cdots\cdot(N-r+1)/r!$ であり, N が整数でかつ $N \geq r$ ならば ${}_N\mathrm{C}_r$ に等しい.

r の平均と分散はそれぞれ Np, Npq である.

3.1.2　ポアソン分布

単位時間中に平均で λ 回発生する事象が同じ時間でちょうど r 回発生する分布は**ポアソン分布** (Poisson distribution) $P_\lambda(r)$ で表される.

$$P_\lambda(r) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!} \tag{9}$$

二項分布に $B_{N,p}(r)$ において, $Np = \lambda$ を一定に保って N を十分大きくすると式 9 で表されるポアソン分布 $P_\lambda(r)$ に近づく.

たとえば, 350 回に 1 回の確率であたりが出るルーレットを 350 回まわしたときにあたりが少なくとも一回以上出る確率は, $1 - P_1(0) = 1 - 1/e \simeq 0.6321$ と概算できる. これを二項分布として正確に計算すると, $1 - B_{350,\frac{1}{350}}(0) = 1 - (349/350)^{350} \simeq 0.6326$ であるから十分に近似できているといえる.

r の平均と分散はそれぞれ λ, λ である.

3.1.3　正規分布

母分布の平均が μ, 分散が σ^2 である大きさ n の標本分布は n が十分に大きいときは標本平均 $\bar{X}(=\mu)$, 標本分散 $S^2(=\sigma^2/n)$ の**正規分布** (Normal distribution) $N(\bar{X}, S^2)$ に従う (**中心極限定理**).

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{10}$$

中心極限定理は, あくまで**標本が大きい標本分布が正規分布に近づく**ということを述べているのであって, たまたま標本分布が正規分布であっても**母分布が正規分布であるとは限らない**ので注意.

ちなみに, 標本分布は**誤差分布** (Error distribution) とも呼ばれる.

4　図形

三次元図形を考えるときの基本知識を抑えておく.

4.1　平面角

同一の始点から引かれた 2 本の半直線を考えたときに, その半直線の開き具合のことを指す. 始点を中心とした半径 r の円と 2 本の半直線で囲まれた領域は半径 r の扇形であるが, その扇形の弧の長さを r で除すと円の半径 r に因らない指標ができる. これが平面角[*1] [rad: radian] である. 全平面角は 2π である.

円弧の長さを基にした指標を弧度法というが, 全平面角を 360 とした度数法表記もある. 弧度法で θ である角度を度数法で表記すると $\frac{180}{\pi}\theta$ となる.

4.2　立体角

立体角とは, ある点から出る半直線が動いて作る錐面を考えたとき, その錐面の開き具合を示すものである. 錐体の半径 r の球面による断面積を考える, 曲面の表面積を r^2 で除すと球の半径 r に因らない指標ができる. これが立体角[*2] [sr: steradian] である. 全立体角は 4π である. 放射線エネルギー計測機器として利用される 2π (4π) ガスフロー計測器の 2π (4π) とは, 立体角を指している.

平面角における度数法に当たるのが平方度である. 弧度法で Θ である角度を平方度で表記すると $32400\Theta/\pi^2$ となる.

4.2.1　立体角の応用

点線源に対して窓の半径が r であるサーベイメーターを用いて D 線量当量を計測することを考える (D は線源とサーベイメータの窓との距離).

サーベイメーターの幾何学的効率は全立体角に対する点線源から見た窓の立体角である. 球については xy 平面グラフにおける原点を中心とした半径 $\sqrt{D^2+r^2}$ の円の回転体である球を考えたとき, 球全体の表面積に対する窓の領域に関する部分の表面積の割合を考えればよい. 円を表す式は $x^2 + y^2 = D^2 + r^2$ である.

[*1] ギリシア文字の θ や ϕ を当てることが多い

[*2] ギリシア文字の Θ を当てることが多い.

球全体の表面積は $4\pi(D^2+r^2)$ である. 窓の領域に関する部分の表面積 S は次の定積分で与えられる.

$$S = 2\pi \int_D^{\sqrt{D^2+r^2}} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad dx$$

S は $2\pi\sqrt{D^2+r^2}\left(\sqrt{D^2+r^2}-D\right)$ となるので, 幾何学的効率は $S/\left\{4\pi(D^2+r^2)\right\}$ すなわち $\left\{\left(1-D/\sqrt{D^2+r^2}\right)\right\}/2$ となる.

参考文献

[1] 小針晛宏. 確率・統計入門. 岩波書店, 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5, may 1973.

[2] 田代嘉宏. 応用解析要論. 森北出版, 東京都千代田区富士見 1-4-11, nov 1986.